Colles de Maths - semaine 6 - MP*2
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Compacité

Exercice 1 (**) Soit K un compact (dans un espace vectoriel normé ou métrique) et $f : K \to K$ telle que

$$\forall x \neq y \in K, \ \ d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f possède un unique point fixe α et que si $x_0 \in K$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers α.

Exercice 2 (***) On note $\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty \right\}$, qu'on munit de $||u||_{\ell^1} = \sum |u_n|$.
Soit $a, b \in \ell^1(\mathbb{N})$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \leq b_n$. On définit

$$K = \{(u_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}), \ \forall n, \ a_n \leq u_n \leq b_n\}.$$

Montrer que K est un compact de $\ell^1(\mathbb{N})$.

Topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 3 (*)

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que l'image par P de tout fermé de $\mathbb{C}$ est un fermé de $\mathbb{C}$.
2. Généralisation : Soit E, F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application continue telle que pour tout K compact de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que l'image par f de tout fermé de E est un fermé de F.

Exercice 4 (**) Soit E, F des espaces vectoriels normés de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que s'équivalent :

(i) Pour tout $O \subset E$ ouvert, $u(O)$ est ouvert ;

(ii) Il existe $O \subset E$ ouvert non vide tel que $u(O)$ est ouvert ;

(iii) u est surjective.

Exercice 5 (**) Soit (E, N) un espace normé de dimension finie et X une partie bornée de E. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant X. Cette boule est-elle unique ?
Indication : Pour l'unicité, traiter séparément le cas des normes euclidiennes.

Connexité par arcs

Exercice 6 (*) Existe-t-il une fonction continue injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ pour $n \geq 2$?

Exercice 7 (*) Soit E un espace vectoriel normé **réel**. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. On suppose que E est de dimensoin finie. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F pour que $\mathbb{R}^n \setminus F$ soit connexe par arcs.
2. (Généralisation, ***) On ne suppose plus E de dimension finie. Montrer que $E \setminus F$ est connexe par arcs si et seulement si F n'est pas un hyperplan fermé.
   On pourra admettre qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé. Noter que si H n'est pas fermé, il est dense, car $\bar{H}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 8 (**) *On admet le théorème de Riesz : la sphère unité d'un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est pas compacte.*
Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie et K un compact de E. Montrer que $E \setminus K$ est connexe par arcs.

Exercice 9 (***) Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, Ω un ouvert connexe par arcs non vide de E tel que $\bar{\Omega}$ est compact. Soit $f : \Omega \to \Omega$ une fonction continue telle que $f(\Omega)$ est ouvert. Montrer qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $d(x_0, \partial\Omega) = d(f(x_0), \partial\Omega)$.
On pourra admettre qu'un ensemble connexe par arcs est connexe, c'est-à-dire qu'il ne peut s'écrire comme réunion de deux ouverts non vides disjoints.

Indications : Commencer par montrer qu'il existe x tel que $d(x, \partial\Omega) \geq d(f(x), \partial\Omega)$. Ensuite, pour montrer qu'il existe x tel que $d(x, \partial\Omega) \leq d(f(x), \partial\Omega)$, raisonner par l'absurde et :

1. *Montrer que $f(\Omega)$ est un fermé relatif de Ω ;*
2. *En déduire que f est surjective ;*
3. *Réutiliser le premier point de la preuve pour conclure à une contradiction.*